ΕΠΙΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ

ΣΧΟΛΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Ε.Μ.Π.

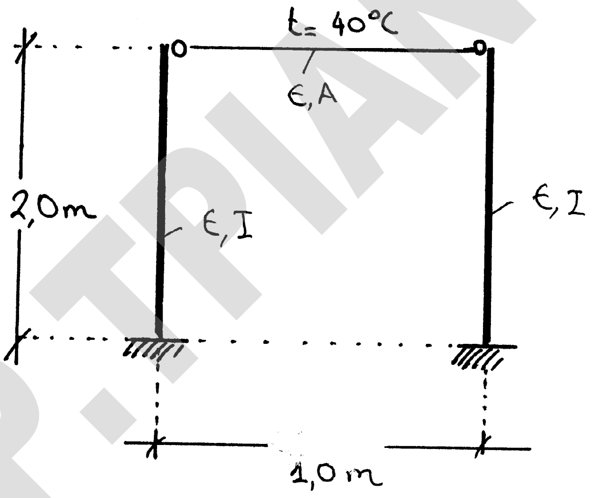
ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ : 17/12/2015

ΕΚΦΩΝΗΣΗ Α' ΘΕΜΑΤΟΣ

Δίνεται η κατασκευή του σχήματος στην οποία δύο όμοιοι πρόβολοι τετραγωνικής διατομής 40cm συνδέονται στα ελεύθερα άκρα τους με ράβδο κυκλικής διατομής ακτίνας $r = 4{,}0cm$.
Η ράβδος υπόκειται σε ομοιόμορφη αύξηση θερμοκρασίας κατά $t = 40°C$.
Ζητείται η δύναμη με την οποία καταπονείται η ράβδος.

Δίνονται:

- Οι πρόβολοι και η ράβδος είναι κατασκευασμένοι από το ίδιο υλικό μέτρου ελαστικότητας $E = 200$ Gpa.
- Συντελεστής γραμμικής διαστολής $\alpha_t = 1 \cdot 10^{-5}\, grad^{-1}$!

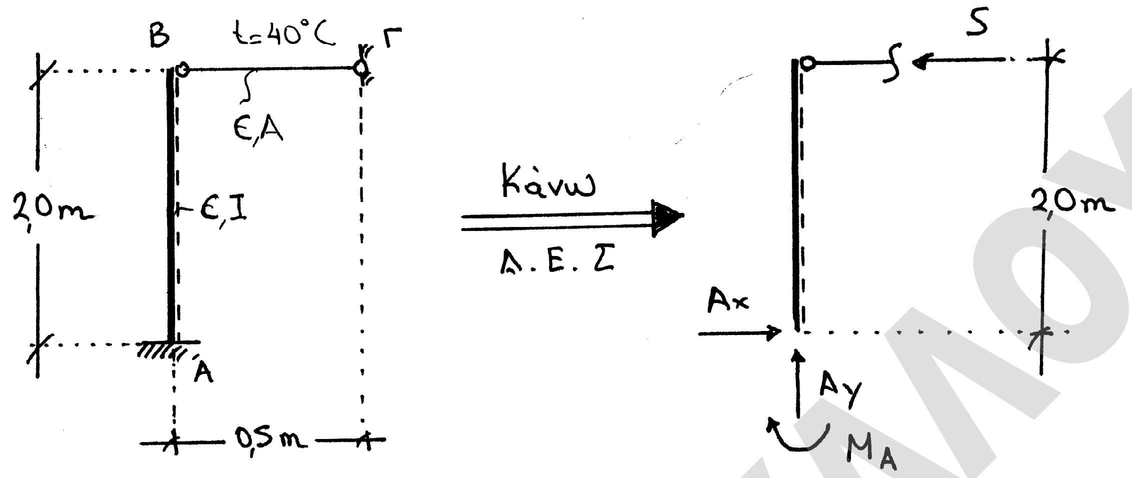


Σημαντική παρατήρηση

Η παραπάνω εκφώνηση δεν ανταποκρίνεται στην ακριβή διατύπωση του θέματος των εξετάσεων αλλά αποδίδει κατ' ουσίαν το νόημα αυτού.
Ο φορέας, η φόρτιση, και το ερώτημα της ανωτέρω εκφώνησης είναι ίδια μ' αυτήν των εξετάσεων, αλλά οι διαστάσεις αυτού και οι διατομές του αποτελούν αυθαίρετη επιλογή του λύτη.

Λύση

Ο φορέας είναι συμμετρικός με φόρτιση συμμετρική, άρα αρκεί να επιλυθεί το παρακάτω στατικό μοντέλο που είναι ισοδύναμο με τον αρχικό φορέα:



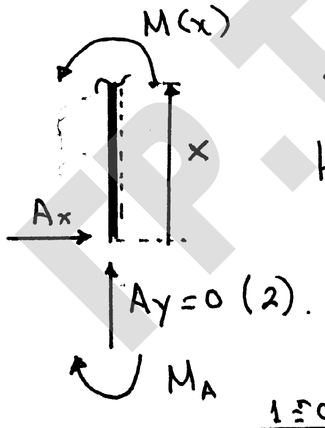
- Εξισώσεις ισορροπίας του Δ.Ε.Σ

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = S$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = 0$ (2)

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A = 2S$ (3)

Επειδή ο φορέας είναι μία φορά υπερστατικός χρειαζόμαστε μία επιπλέον εξίσωση. Καταφεύγουμε λοιπόν στην εξίσωση της ελαστικής γραμμής. Βρίσκω την συνάρτηση της ροπής κάμψης κατά μήκος του προβόλου, κάνοντας Δ.Ε.Σ από την μεριά της πάκτωσης.



$$\Sigma M = 0 \Rightarrow M(x) + A_x \cdot x - M_A = 0 \Rightarrow M(x) = M_A - A_x \cdot x \quad (4)$$

$$\text{Η } (4) \xrightarrow{(1),(3)} M(x) = 2S - S\cdot x \quad \text{με} \quad 0 \le x \le 2,0$$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \Rightarrow \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{S\cdot x - 2S}{EI}$$

1η ολοκλήρωση: $\dfrac{dw(x)}{dx} = \dfrac{1}{EI}\cdot\left[S\cdot\dfrac{x^2}{2} - 2S\cdot x + C_1\right]$. (5)

2η ολοκλήρωση: $w(x) = \dfrac{1}{EI}\cdot\left[S\cdot\dfrac{x^3}{6} - Sx^2 + C_1\cdot x + C_2\right]$. (6)

Λαμβάνοντας τις οριακές κινηματικές συνθήκες του φορέα θα έχουμε:

- $\frac{dw(x=0)}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (7)$

- $w(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (8)$

- $w(x=2{,}0) = -(\Delta\ell_t - \Delta\ell_s) \Rightarrow w(x=2{,}0) = -\left(a_t\cdot\ell\cdot t - \frac{S\cdot\ell}{EA}\right)$ ℓ = μήκος ράβδου.

$$\xrightarrow{(6),(7),(8)} \frac{1}{200\cdot10^6\cdot\frac{0{,}4^4}{12}}\cdot\left[S\cdot\frac{2^3}{6}-S\cdot2^2\right] = -\left(1\cdot10^{-5}\cdot0{,}5\cdot40-\frac{S\cdot0{,}5}{200\cdot10^6\cdot\pi\cdot0{,}04^2}\right)\Rightarrow$$

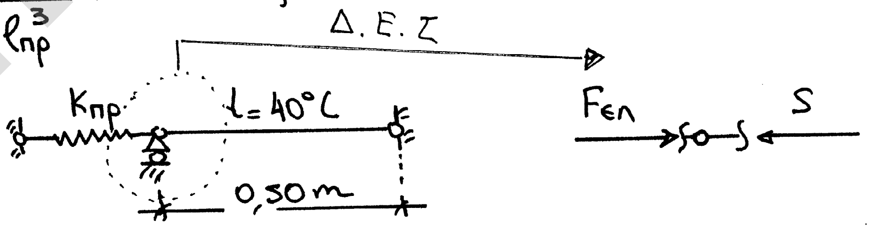
$$\Rightarrow \frac{1}{42{,}667\cdot10^4}\cdot(-2{,}667S) = -20\cdot10^{-5}+4{,}9736\cdot10^{-7}S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow +0{,}0625\cdot10^{-4}S+4{,}9736\cdot10^{-7}S = 20\cdot10^{-5} \Rightarrow \underline{\underline{S = 29{,}641\ kN}}$$

Επειδή η $S > 0$ ορθώς από την αρχή την υπέθεσα θλιπτική.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΛΥΤΗ

Η άσκηση αυτή λυνόταν πολλή γρήγορα αν εκμεταλλευόμασταν την δυσκαμψία του προβόλου (η οποία είναι γνωστή από την Στατική ή και τις Αντισεισμικές κατασκευές). Έτσι λοιπόν μπορούμε να προσομοιώσουμε τον πρόβολο μ' ένα μεταφορικό ελατήριο που θα έχει την δυσκαμψία του προβόλου, δηλαδή $K_{ελ} = K_{πρ} = \frac{3EI}{\ell_{πρ}^3}$. Θα έχουμε λοιπόν:



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} = S \Rightarrow K_{πρ}\cdot x = S \Rightarrow K_{πρ}\cdot\Delta\ell = S \Rightarrow \frac{3EI}{\ell_{πρ}^3}\cdot(\Delta\ell_t-\Delta\ell_s) = S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3\cdot200\cdot10^6\cdot\frac{0{,}4^4}{12}}{2{,}0^3}\cdot\left(1\cdot10^{-5}\cdot0{,}5\cdot40-\frac{S\cdot0{,}50}{200\cdot10^6\cdot\pi\cdot0{,}04^2}\right) = S \Rightarrow \underline{\underline{S = 29{,}641\ kN}}\ !!$$