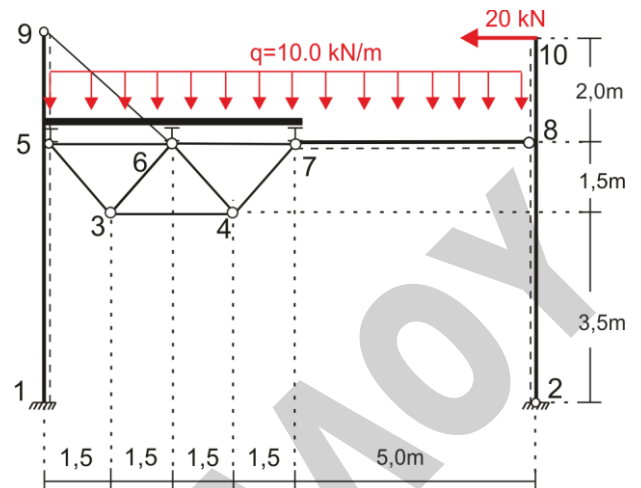


Ε.Μ.Π. - ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΣΤΑΤΙΚΗ Ι 12/10/2011
ΘΕΜΑ 1ο

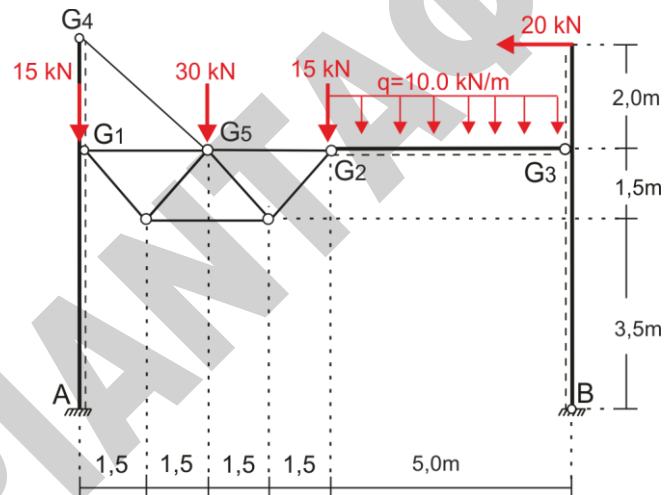
Στον φορέα του σχήματος ζητούνται:

 α) να χαραχθούν τα διαγράμματα M, Q, N

β) η μετακίνηση του κόμβου 9

 Δεδομένα: $EI=60.000\text{kNm}^2$, $EAs=30.000\text{kN}$

Λύση:

α) Στις θέσεις των τεγίδων εισάγονται μοναχικά φορτία που είναι οι αντιδράσεις της αμφιέριστης δοκού λόγω ομοιόμορφου φορτίου. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η ενδιάμεση τεγίδα αναλαμβάνει το διπλάσιο φορτίο από ότι οι ακριανές. Έτσι θα έχουμε τον κάτωθι φορέα προς επίλυση:



Ο φορέας αποτελείται από ένα δευτερεύων τριαρθρωτό τόξο (G_2G_3B) και από έναν πρόβολο. Ο πρόβολος στην ουσία είναι κατασκευασμένος από 3 δίσκους συνδεδεμένα αρθρωτά μεταξύ τους ($AG_4 - G_4G_5 - G_1G_2$). Η επίλυση (εύρεση αντιδράσεων ξεκινάει από το τριαρθρωτό τόξο.

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ:

Η ανάλυση του φορέα θα μπορούσε να γίνει και διαφορετικά. Δηλαδή: Έχω δύο τριαρθρωτά τόξα ($B G_2 G_3$ & $G_4G_5 G_1G_2$) που στηρίζονται πάνω στον πρόβολο AG_1G_4 .

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow G_2^x = B_x + 20 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y + G_2^y = 65 \quad (2)$$

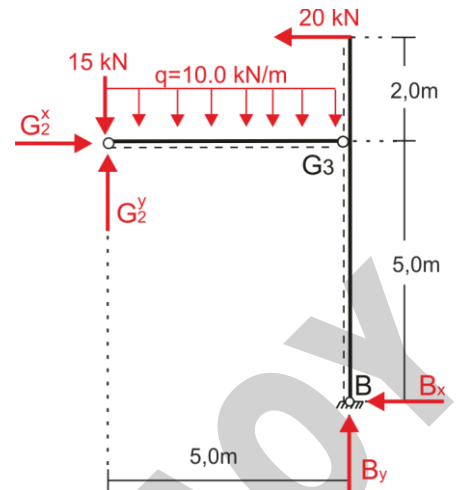
$$\Sigma M_{G_2} = 0 \Rightarrow 10 \cdot 5,0 \cdot 2,5 - 20 \cdot 2 - 5B_y + 5B_x = 0 \Rightarrow 5B_y - 5B_x = 85 \quad (3)$$

$$\Sigma M_{G_3}^{\Delta E \Xi I \Delta I \Sigma K O} = 0 \Rightarrow 5B_x - 20 \cdot 2,0 = 0 \Rightarrow B_x = 8,0 \text{ kN} \quad (4)$$

$$(1) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} G_2^x = 8,0 + 20 \Rightarrow G_2^x = 28,0 \text{ kN}$$

$$(3) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} 5B_y = 85 - 5 \cdot 8,0 \Rightarrow B_y = 25,0 \text{ kN} \quad (5)$$

$$(2) \stackrel{(5)}{\Rightarrow} G_2^y = 65 - B_y \Rightarrow G_2^y = 40 \text{ kN}$$



Βρίσκουμε τις αντιδράσεις του προβόλου AG₄. Από γεωμετρία θα έχω:

$$\varepsilon \varphi \varphi_1 = \frac{3,0}{2,0} \Rightarrow \varphi_1 = 56,31^\circ \quad \varepsilon \varphi \varphi_2 = \frac{1,5}{1,5} \Rightarrow \varphi_2 = 45^\circ$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 28 \quad (6)$$

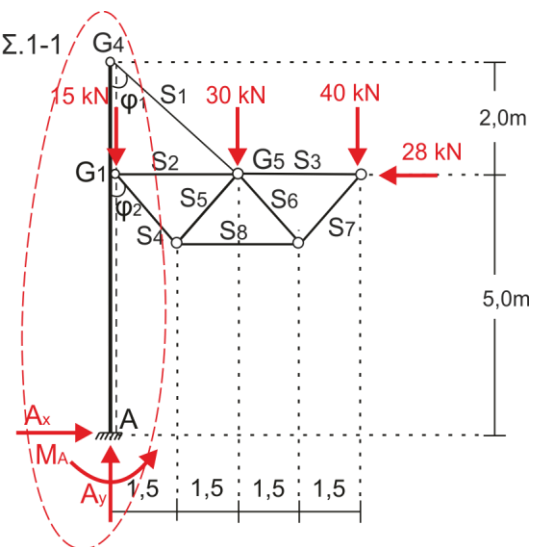
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = 85 \quad (7)$$

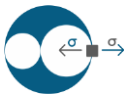
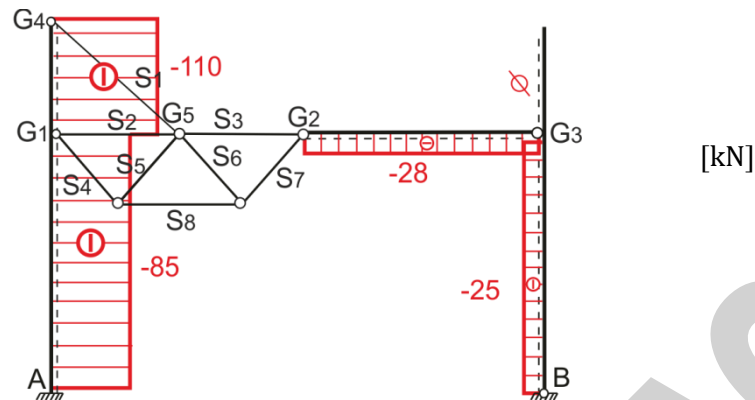
$$\Sigma M_{(A)} = 0 \Rightarrow M_A - 30 \cdot 3 - 40 \cdot 6 + 28 \cdot 5,0 = 0 \Rightarrow M_A = 190 \text{ kNm} \quad (8)$$

Κάνω τιμή Ritter 1-1' κόβοντας τις ράβδους S₁, S₂, S₄ και παίρνω το αριστερό κομμάτι του φορέα (τον πρόβολο) όπως δείχνεται στο διπλανό σχήμα.

$$\Sigma M_{G_1} = 0 \Rightarrow 2S_1 \eta \mu \varphi_1 - 28 \cdot 5,0 - 190 = 0 \Rightarrow S_1 = +198,31 \text{ kN}$$

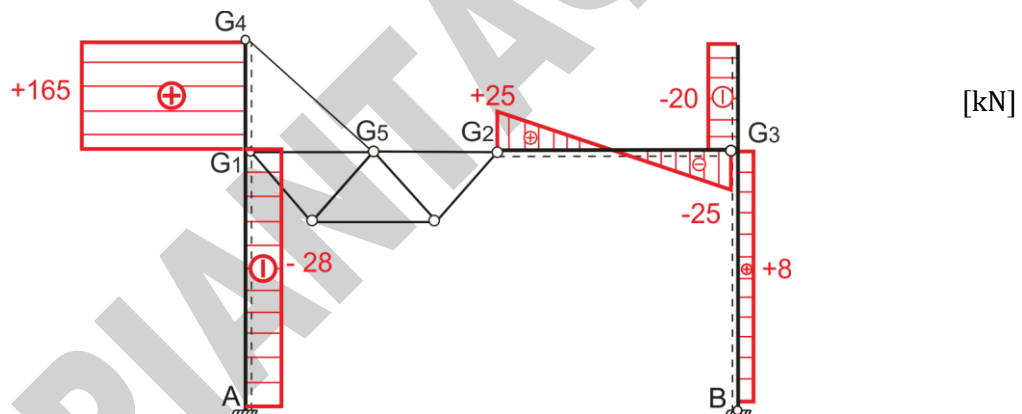
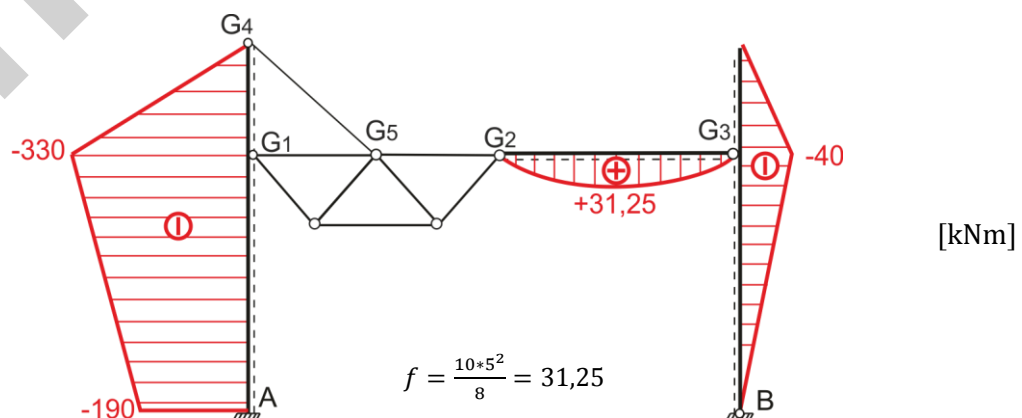
Δ.Ε.Σ. 1-1'



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΞΟΝΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ $N(x)$ 

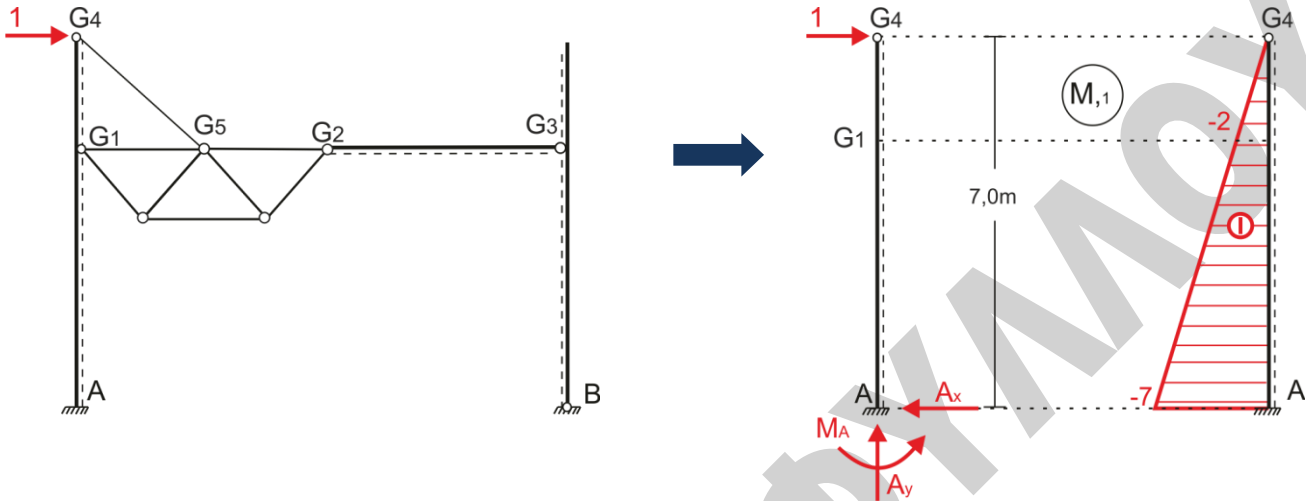
ΤΑΣΕΙΣ ΡΑΒΔΩΝ (kN)

- $S_1 = +198,31$
- $S_2 = -153,0$
- $S_3 = +12,0$
- $S_4 = -56,57$
- $S_5 = +56,57$
- $S_6 = +56,57$
- $S_7 = -56,57$
- $S_8 = -80,0$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΕΜΝΟΥΣΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ $Q(x)$ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΠΩΝ ΚΑΜΨΕΩΣ $M(x)$ 

β) ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΗΣ ΚΟΜΒΟΥ G_4

Η οριζόντια μετακίνηση του κόμβου G_4 βρίσκεται αφού φορτίσουμε με μοναδιαίο οριζόντιο φορτίο στην θέση G_4 και επιλύσουμε τον φορέα (εύρεση ροπών και τάσεων ράβδων). Δηλαδή:



Τα δευτερεύων τριαρθρωτά τόξα είναι αφόρτιστα οπότε και δεν έχουν ένταση ($M=Q=N=0$ καθώς και οι τάσεις των ράβδων $S_i=0$). Αρκεί λοιπόν να βρω τις αντιδράσεις του προβόλου AG_4 όπως και φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow A_x=1,0$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y=0$$

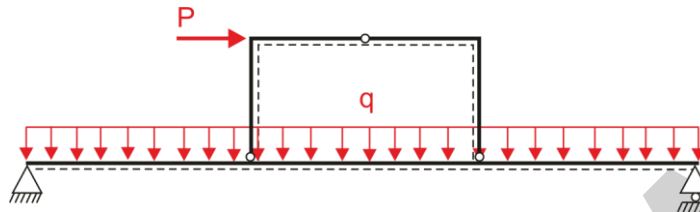
$$\Sigma M_{(A)}=0 \Rightarrow M_A=7,0 \text{ kNm}$$

$$\delta_{G_4,P} = \frac{1}{60000} \left\{ \left[\frac{1}{3} (-2) * (-330) * 2 \right] + \frac{1}{6} * 5 * \{ (-2) * [2 * (-330) + (-190)] + (-7) * [(-330) + 2 * (-190)] \} \right\} \Rightarrow \delta_{G_4,P} = 0,10 \text{ m}$$

ΣΤΑΤΙΚΗ Ι - 12/10/2011 - ΠΟΛΙΤΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ-Ε.Μ.Π.

ΘΕΜΑ 2^ο

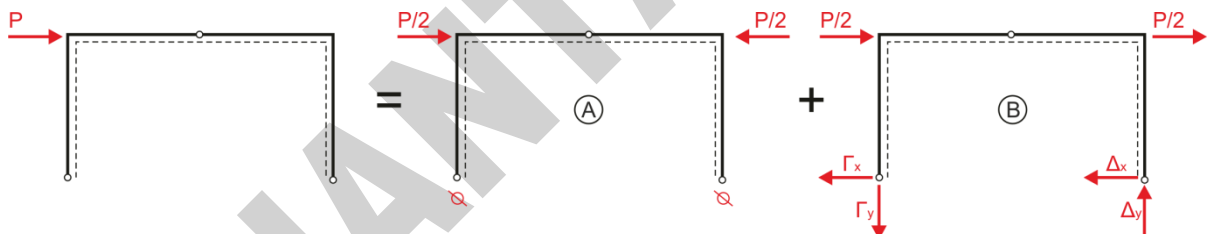
Στον φορέα του σχήματος ζητείται η ποιοτική χάραξη των διαγραμμάτων M, Q, N χωρίς απολύτως κανέναν υπολογισμό, αλλά με επαρκή αιτιολόγηση.



Λύση:

Παρατηρώ ότι ο φορέας αποτελείται από ένα δευτερεύων τριαρθρωτό τόξο το οποίο στηρίζεται εξ'ολοκλήρου πάνω σε μια αμφιέριστη δοκό. Η ποιοτική χάραξη θα ξεκινήσει πρώτα από το τριαρθρωτό τόξο και στην συνέχεια θα μεταφέρω τις αντιδράσεις του πάνω στην αμφιέριστη δοκό όπου και θα ολοκληρώσω με την ανάλυση της.

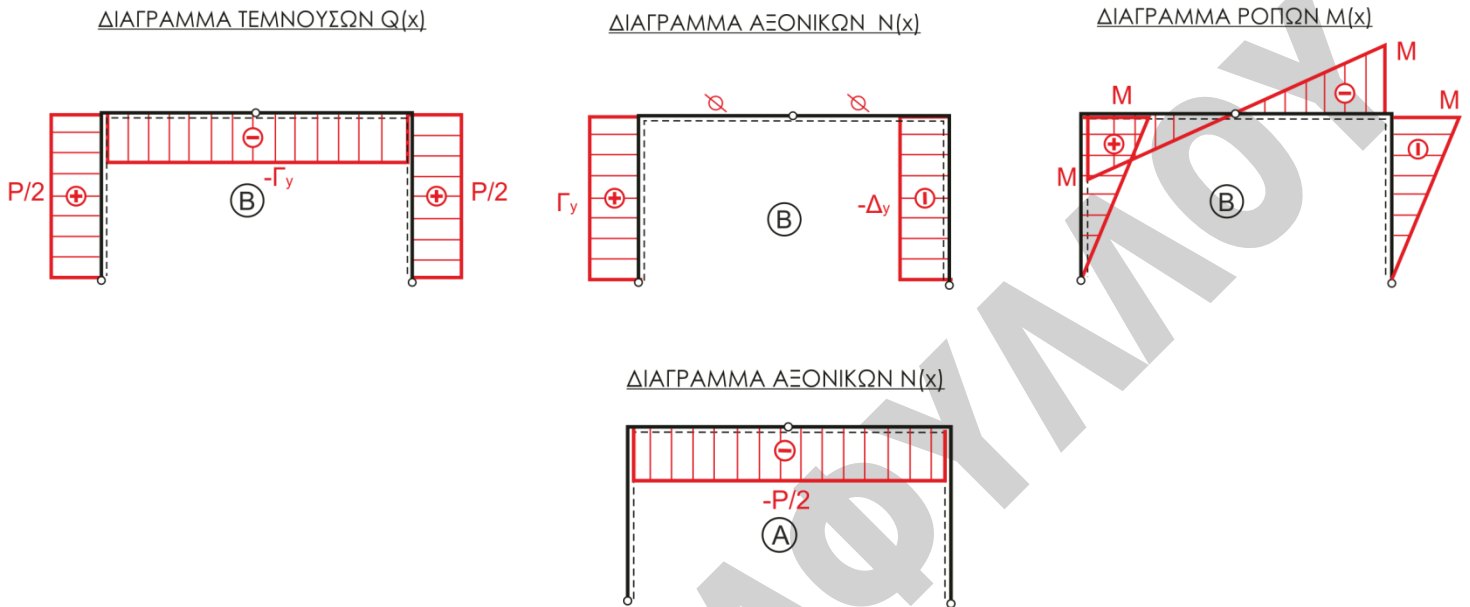
• ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΡΙΑΡΘΡΩΤΟΥ ΤΟΞΟΥ



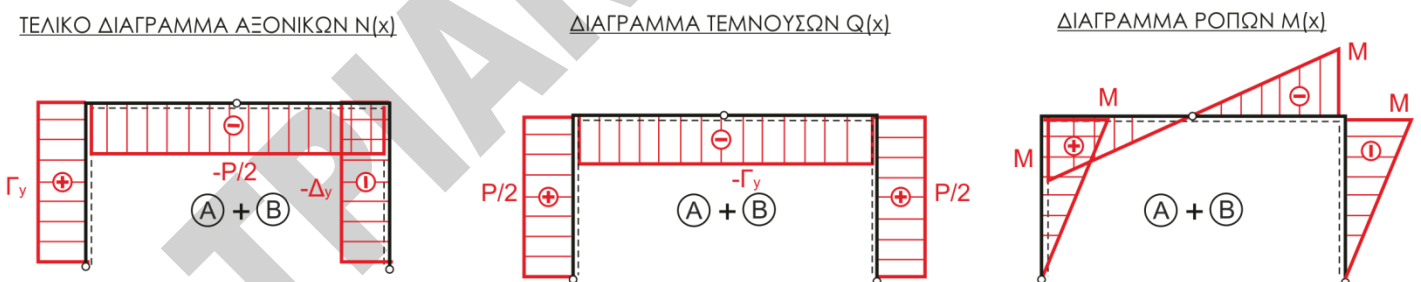
Πρόκειται για φορέα συμμετρικό. Αναλύω την φόρτιση σε συμμετρική (A) και σε αντισυμμετρική (B) όπως φαίνεται στο επάνω σχήμα.

Στην συμμετρική φόρτιση καταπονείται μόνο το ζύγωμα με θλιπτική αξονική δύναμη $P/2$. Για την αντισυμμετρική φόρτιση βρίσκω τις αντιδράσεις των στηρίξεων. Επειδή πρόκειται για συμμετρικό φορέα με αντισυμμετρική φόρτιση θα έχω αντισυμμετρικές αντιδράσεις. Επίσης λόγω του γεγονότος ότι δεν έχω κατακόρυφα φορτία οι κατακόρυφες αντιδράσεις Γ_y, Δ_y θα είναι ίσες και με αντίθετη φορά. Οι οριζόντιες αντιδράσεις θα έχουν υποχρεωτικά αντίθετη φορά από την εξωτερική φόρτιση. Τέλος, και λόγω της προηγούμενης πρότασης (που αφορά τις οριζόντιες αντιδράσεις), οι κατακόρυφες αντιδράσεις θα πρέπει να δίνουν τέτοια ροπή που να αναιρεί την ροπή των εξωτερικών φορτίων. Για όλους τους παραπάνω λόγους η σωστή φορά των

αντιδράσεων φαίνεται στο παραπάνω σχήμα (B). Αφού γνωρίζουμε πλέον τις αντιδράσεις του τριαρθρωτού τόξου μπορούμε να κάνουμε τα διαγράμματα M, Q, N γνωρίζοντας επιπλέον ότι για αντισυμμετρική φόρτιση τα M, N είναι αντισυμμετρικά, ενώ τα Q συμμετρικά.

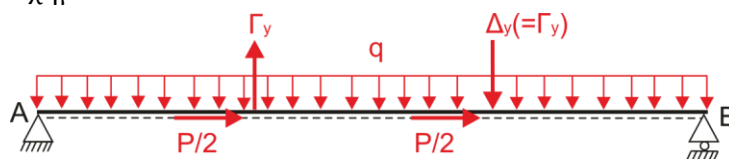


Τα τελικά διαγράμματα του δευτερεύοντος τριαρθρωτού τόξου είναι το άθροισμα των περιπτώσεων (A) και (B) τα οποία παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα:

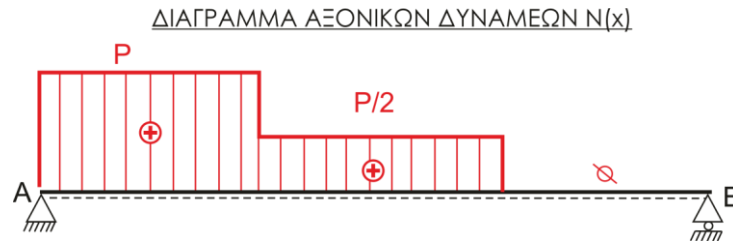


• ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

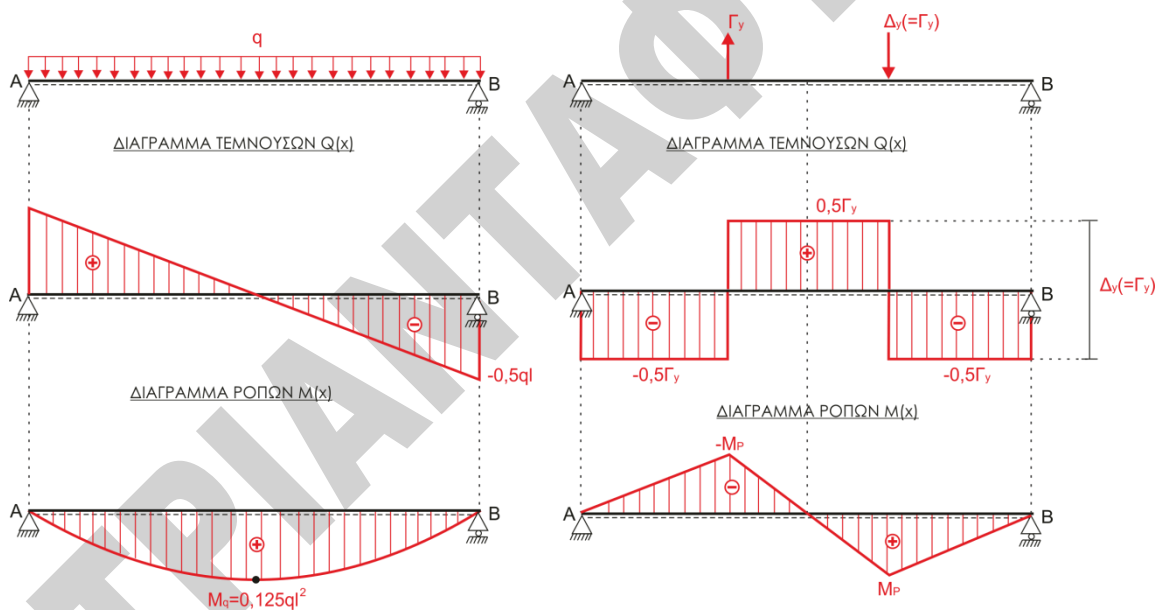
Μεταφέρω τις αντιδράσεις του τριαρθρωτού τόξου στην αμφιέρειστη δοκό. Ο φορέας που προκύπτει και που πρέπει να κατασκευάσουμε τα ποιοτικά διαγράμματα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Λόγω της μορφής του φορέα τα εξωτερικά φορτία που βρίσκονται πάνω στον άξονα του δημιουργούν μόνο αξονικές δυνάμεις. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται το διάγραμμα N της αμφίρριστης δοκού.



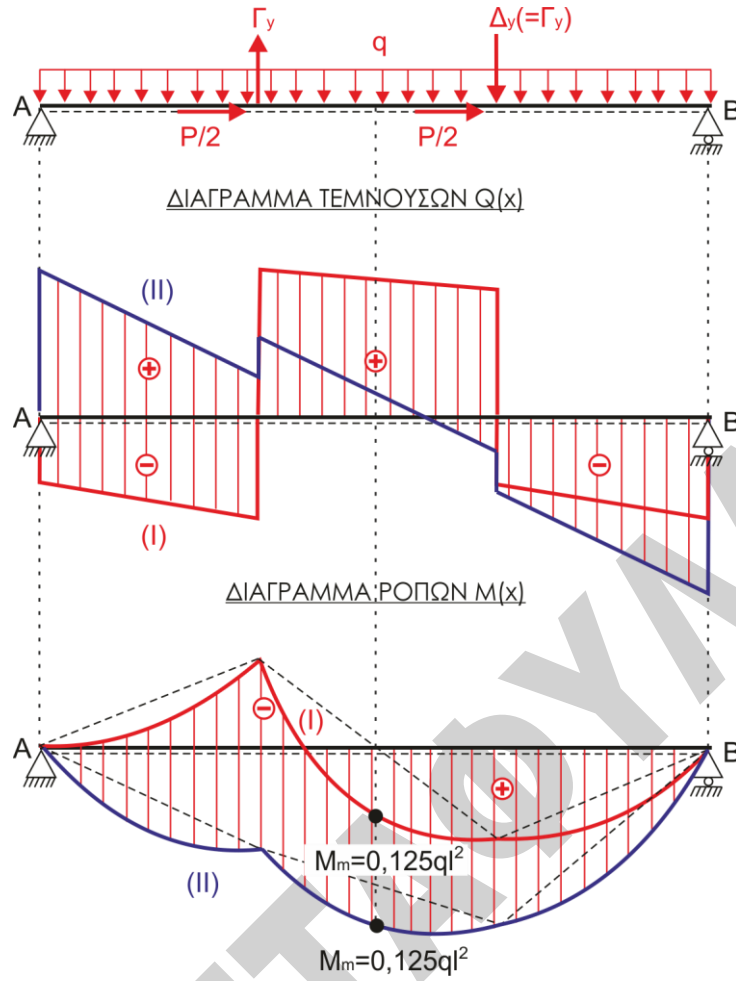
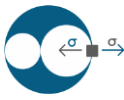
Για την κατασκευή των διαγραμμάτων M και Q παρατηρώ ότι η τελική φόρτιση είναι το άθροισμα α) ενός ομοιόμορφου φορτίου q (συμμετρική φόρτιση) και β) δυο μοναχικών φορτίων. Άρα αρκεί να σχεδιάσω τα διαγράμματα M , Q για κάθε μια από τις περιπτώσεις α) και β) και στη συνέχεια να τις προσθέσω.



Ακολουθεί η σύνθεση των παραπάνω διαγραμμάτων. Εδώ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- η πρώτη περίπτωση αφορά το μοναχικό φορτίο P να έχει μεγαλύτερη επιρροή (σε σχέση με το ομοιόμορφο φορτίο q) και συμβολίζεται στο σχήμα I.
- η δεύτερη περίπτωση αφορά το ομοιόμορφο φορτίο q να έχει μεγαλύτερη επιρροή (σε σχέση με το μοναχικό φορτίο P) και συμβολίζεται στο σχήμα II.

Η σύνθεση των διαγραμμάτων φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

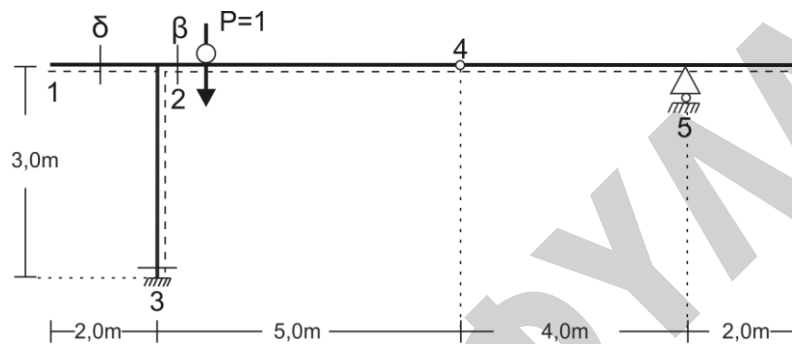


ΣΤΑΤΙΚΗ Ι - 12/10/2011 - ΠΟΛ.ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ-Ε.Μ.Π.

ΘΕΜΑ 3^ο

Στον φορέα του σχήματος και για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου από 1 έως 6 ζητείται η χάραξη των γραμμών επιρροής για:

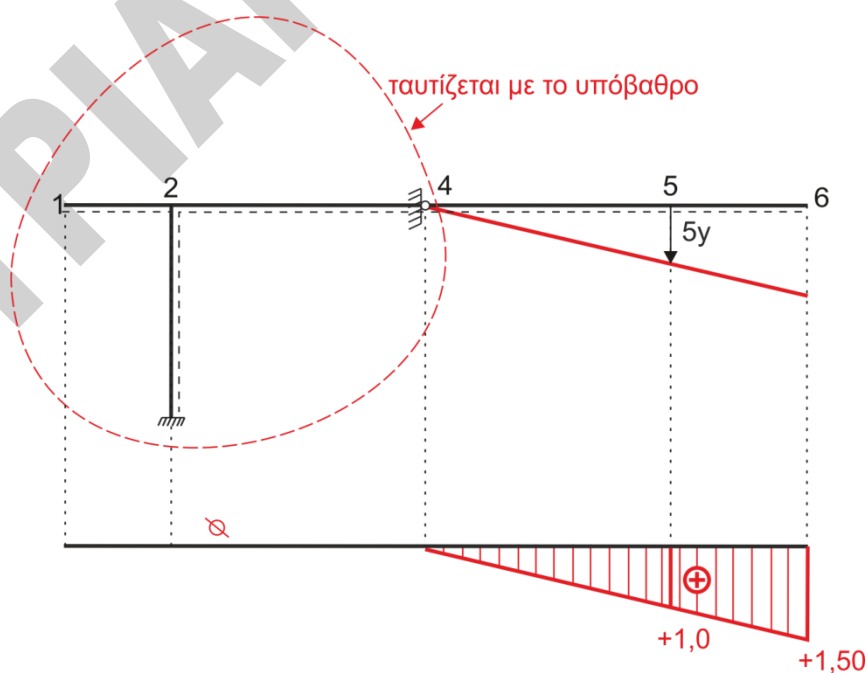
1. η αντίδραση στη στήριξη 5
2. την τέμνουσα στη διατομή β
3. την ροπή κάμψεως στη διατομή γ
4. την τέμνουσα στην διατομή δ (μέσο του 1-2)

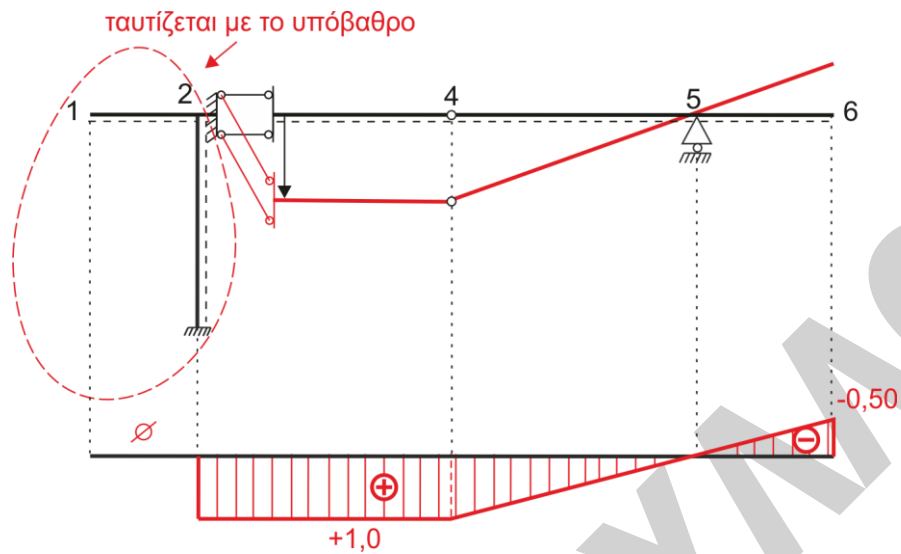
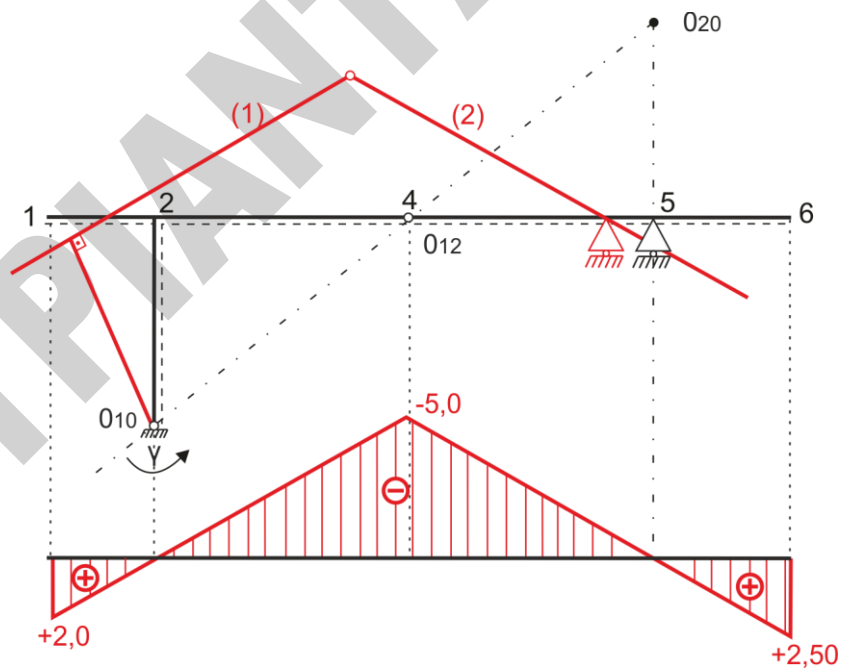


Λύση:

Για κάθε γραμμή επιρροής που μου ζητείται θα παρουσιάζεται ο αντίστοιχος κινητός φορέας μαζί με την παραμορφωμένη κατάσταση του και από κάτω θα σχεδιάζεται η λύση του ερωτήματος.

1. [5γ]



2. $[Q_\beta]$ 3. $[M_\gamma]$ 

O_{10}, O_{20} : οι απόλυτοι πόλοι στροφής των δίσκων (1) και (2)

O_{12} : ο σχετικός πόλος στροφής των δίσκων (1) και (2)

(δ)[Q_δ]